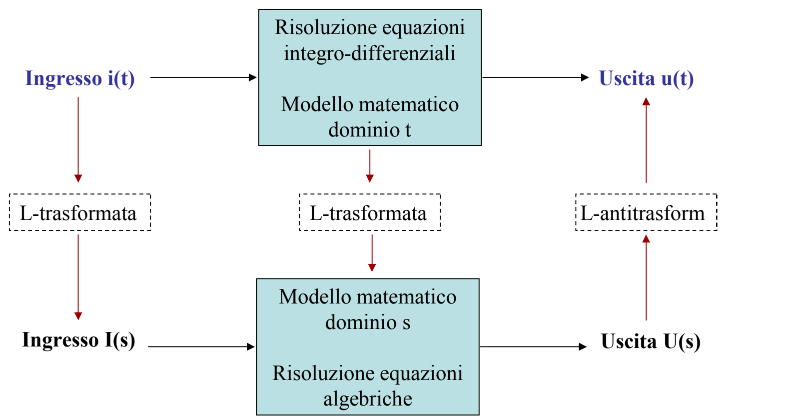
Trasformata di Laplace

Nozioni di base

Angelo Bisceglia

I sistemi lineari sono descritti da modelli matematici nel dominio del tempo costituiti da equazioni integro-differenziali di difficile soluzione.

Si preferisce l'uso della Trasformata di Laplace [unilatera f(t)=0 per t<0] o domino della variabile complessa s, che trasforma le equazioni integro-differenziali in equazioni algebriche.



L'operatore L-trasformata stabilisce una <u>corrispondenza biunivoca</u> tra un insieme di partenza di funzioni f(t) e l'insieme di arrivo di funzioni F(s) con

$$s = \sigma + j\,\omega$$

In simboli:

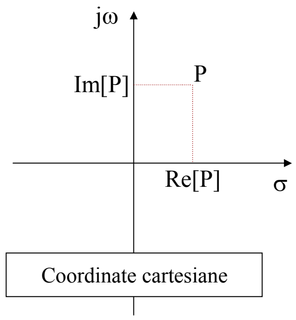
$$L\,[f(t)] = F(s) \quad \Leftrightarrow \quad L^{-1}\,[F(s)] = f(t)$$

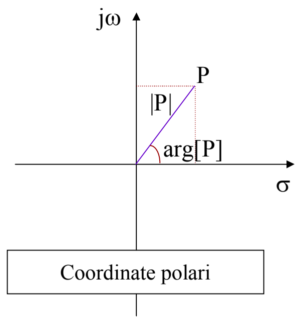
$$L\left[f\left(t\right)\right] = \int_{0}^{+\infty} f\left(t\right) e^{-st}\, dt = F\left(s\right)$$

Si ricordi che F(s) è una funzione a valori complessi di variabile complessa:

$$F(\sigma+j\omega) = \mathrm{Re}\{F(\sigma+j\omega)\} + j\ \mathrm{Im}\{F(\sigma+j\omega)\} = |F(\sigma+j\omega)|\ e^{\,j\ \arg\{F(\sigma+j\omega)\}}$$

Numeri complessi





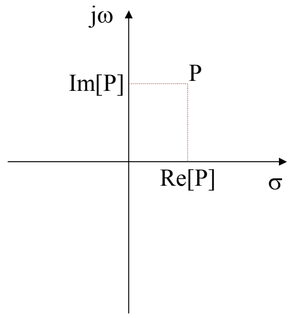
Il punto P può essere espresso secondo le coordinate cartesiane:

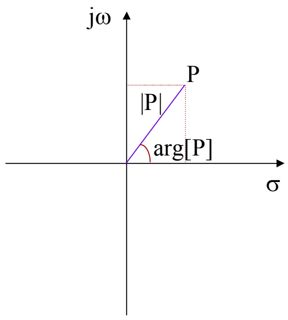
$$\mathbf{P = Re[P] + j\ Im[P]}$$

che le coordinate polari:

$$\mathbf{P = |P|\ e^{\,j\ arg[P]}}$$

Numeri complessi





Passaggio da coordinate polari a coordinate cartesiane:

$$\mathrm{Re}[P] = |P|\cos(\arg[P]) \qquad \mathrm{Im}[P] = |P|\sin(\arg[P])$$

Passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari :

$$|P| = \sqrt{\{\mathrm{Re}[P]\}^2 + \{\mathrm{Im}[P]\}^2} \qquad \arg[P] = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}[P]}{\mathrm{Re}[P]}$$

Due numeri complessi si dicono **coniugati** se hanno la stessa **Re** e **Im** opposta

Numeri complessi

Da quanto detto si ricava: $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$

(esponenziale complesso o formula di Nepero)

Si noti che: $e^{s} = e^{\sigma + j\omega} = e^{\sigma}\, e^{j\omega} = e^{\sigma}(\cos\omega + j\sin\omega)$

e che $\left|e^{j\alpha}\right| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$

Per operazioni sui numeri complessi:

Per somme e sottrazioni conviene usare la forma cartesiana;
Per moltiplicazioni, divisioni, potenze e radici conviene usare la forma polare.

Proprietà delle trasformate di Laplace

	$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
Prodotto di f(t) per una costante k	$k\ f(t)$	$k\ L[f(t)]$
Teorema della linearità	$k_1\ f_1(t) + k_2\ f_2(t)$	$k_1\ L[f_1(t)] + k_2\ L[f_2(t)]$
Teorema della derivata	$\frac{df(t)}{dt}$	$s\ F(s)$
Teorema dell' integrale	$\int f(t)\,dt$	$\frac{1}{s}\ F(s)$
Teorema del valore finale	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} s\,F(s)$
Teorema del valore iniziale	$f(0) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$	$f(0) = \lim_{s\to\infty} s\ F(s)$
Teorema della traslazione	$f(t-T)$ { $f(0)=0$ per $t<T$ }	$e^{-Ts}\ F(s)$

Principali trasformate di Laplace

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$	$\frac{1}{s^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$\frac{1}{(b-a)}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{a}{(b-a)}e^{-at}-\frac{b}{(b-a)}e^{-bt}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema lineare}} \longrightarrow y(t)$$

In molti casi il sistema lineare è regolato da equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti del tipo [con **n ≥ m** per la fisica realizzabilità] :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_o\, y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0\, x(t)$$

Per la soluzione (o integrazione) dell'equazione i.e. la determinazione di una funzione y(t) che per $t \geq 0$ la soddisfi occorre conoscere:

- Le condizioni iniziali: $y(0^-)\,;\quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-}\,;\ \dots\dots\,;\quad \left.\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-}$

- Il segnale di ingresso: $x(t)$ per $t \geq 0$

Per la soluzione dell'equazione si possono considerare separatamente i contributi delle condizioni iniziali e del segnale di ingresso, i.e. si può ottenere la soluzione dell'equazione differenziale come somma di due funzioni:

- Si suppone $x(t) = 0$ e si determina $\mathbf{y_0(t)}$

  [evoluzione libera del sistema]

- Si suppongono nulle tutte le condizioni iniziali e si determina $\mathbf{y_1(t)}$

  [evoluzione forzata del sistema]

Si ottiene così la soluzione totale: $\mathbf{y(t) = y_0(t) + y_1(t)}$

Spesso nei sistemi di controllo automatici si fa riferimento a sistemi inizialmente in quiete, i.e. con tutte le condizioni iniziali nulle.

Con questa ipotesi, trasformando secondo Laplace e applicando le sue proprietà dall'equazione differenziale:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_o \, y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + ... + b_0 \, x(t)$$

si ottiene:

$$a_n \, s^n \, Y(s) + a_{n-1} \, s^{n-1} \, Y(s) + ... + a_o \, Y(s) = b_m \, s^m \, X(s) + b_{m-1} \, s^{m-1} \, X(s) + ... + b_0 \, X(s)$$

da cui:

$$\left[a_n \, s^n + a_{n-1} \, s^{n-1} + ... + a_o\right] Y(s) = \left[b_m \, s^m + b_{m-1} \, s^{m-1} + ... + b_0\right] X(s)$$

Si quindi:

$$Y(s) = \frac{\left[b_m \, s^m + b_{m-1} \, s^{m-1} + ... + b_0\right]}{\left[a_n \, s^n + a_{n-1} \, s^{n-1} + ... + a_o\right]} X(s)$$

Si definisce funzione di trasferimento (f.d.t.) il rapporto:

$$G(s) = \frac{\left[b_m \, s^m + b_{m-1} \, s^{m-1} + ... + b_0\right]}{\left[a_n \, s^n + a_{n-1} \, s^{n-1} + ... + a_o\right]} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

La f.d.t. di un sistema è la funzione della variabile s moltiplicando la quale per la trasformata di Laplace dell'ingresso si ottiene la trasformata di Laplace dell'evoluzione forzata $Y_1(s)$:

$$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y_1(s)$$

ANTITRAFORMAZIONE DI LAPLACE

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_o}$$

[con **$n \geq m$** per la fisica realizzabilità]

Il polinomio di grado m al numeratore ammette m soluzioni (reali e/o complesse coniugate) all'equazione:

$$b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_0 = 0$$

Tali soluzioni ($\mathbf{z_i}$) sono detti **zeri della f.d.t.**

Il polinomio di grado n al denominatore ammette n soluzioni (reali e/o complesse coniugate) all'equazione:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

Tali soluzioni ($\mathbf{p_i}$) sono detti **poli della f.d.t.**

La f.d.t. può essere scomposta in fratti semplici:

$$G(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) .... (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) .... (s - p_n)}$$

con $k = b_m$

Per antitrasformare secondo Laplace { $L^{-1}[G(s)]$ }, si distinguono i casi:

- si hanno solo poli semplici (reali o complessi coniugati);

- si hanno poli multipli.

In entrambi i casi si usa il metodo dello sviluppo in frazioni parziali o metodo di Heaviside

Poli semplici reali non nulli

$$G(s) = k\frac{(s-z_1)(s-z_2)....(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)....(s-p_n)} = \frac{k_1}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{(s-p_2)} + ... + \frac{k_n}{(s-p_n)}$$

con k_i **residuo** polo i-simo: $k_i = G(s)(s-p_i)\big|_{s=p_i}$

Antitrasformando la G(s) nella forma di somma di fratti semplici

$$L^{-1}\left[k\frac{1}{s+a}\right] = k\,e^{-a\,t}$$

$$L^{-1}[G(s)] = k_1\,e^{p_1 t} + k_2\,e^{p_2 t} + ... + k_n\,e^{p_n t}$$

Si noti l'equivalenza: $\frac{k_i}{(s-p_i)} = \frac{k'_i}{(1+\tau_i\,s)}$ con $k'_i = -k_i/p_i$ $\tau_i = -1/p_i$

τ_i è detta costante di tempo e caratterizza la risposta al gradino dei sistemi del 1° ordine

Esempio $G(s) = \frac{(5s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{k_1}{(s+1)} + \frac{k_2}{(s+2)} + \frac{k_3}{(s+3)}$

$p_1 = -1$
$p_2 = -2$
$p_3 = -3$

$$k_i = G(s)(s-p_i)\big|_{s=p_i} \begin{cases} k_1 = \dfrac{5(-1)+3}{(-1+2)(-1+3)} = -1 \\ k_2 = \dfrac{5(-2)+3}{(-2+1)(-2+3)} = +7 \\ k_3 = \dfrac{5(-3)+3}{(-3+1)(-3+2)} = -6 \end{cases}$$

$$L^{-1}\left[k\frac{1}{s+a}\right] = k\,e^{-a\,t}$$

$$G(s) = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{7}{(s+2)} + \frac{-6}{(s+3)}$$

$$L^{-1}[G(s)] = -\,e^{-t} + 7\,e^{-2t} - 6\,e^{-3t}$$

Poli semplici complessi coniugati

Per semplicità si considerano solo due poli complessi coniugati:

$p_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ $\qquad\qquad$ $p_2 = \sigma_1 - j\omega_1$

Si calcolano i residui:

il k_i residuo polo i-simo:

$$k_i = G(s)(s - p_i)\big|_{s=p_i}$$

In definitiva:

$$k_1 = u_1 + jv_1 = \frac{M_1}{2}\, e^{+j\varphi_1} \qquad k_2 = u_1 - jv_1 = \frac{M_1}{2}\, e^{-j\varphi_1}$$

$$\frac{M_1}{2} = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{v_1}{u_1}$$

Si può dimostrare che i residui sono coniugati.

Lo sviluppo in somma di fratti semplici è:

$$G(s) = \frac{M_1}{2}\frac{e^{j\varphi_1}}{(s - \sigma_1 - j\omega_1)} + \frac{M_1}{2}\frac{e^{-j\varphi_1}}{(s - \sigma_1 + j\omega_1)}$$

$$G(s) = \frac{M_1}{2}\left[\frac{e^{j\varphi_1}}{s-(\sigma_1 + j\omega_1)} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{s-(\sigma_1 - j\omega_1)}\right]$$

Antitrasformando la funzione si ottiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[k\,\frac{1}{s+a}\right] = k\, e^{-a\,t}$$

$$L^{-1}[G(s)] = \frac{M_1}{2}\left[e^{j\varphi_1}\, e^{(\sigma_1 + j\omega_1)\,t} + e^{-j\varphi_1}\, e^{(\sigma_1 - j\omega_1)\,t}\right]$$

$$\frac{M_1}{2}\left[e^{\sigma_1\,t}\, e^{j\omega_1 t}\, e^{j\varphi_1} + e^{\sigma_1\,t}\, e^{-j\omega_1 t}\, e^{-j\varphi_1}\right]$$

$$\frac{M_1}{2} e^{\sigma_1\,t}\left[e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{-j(\omega_1 t + \varphi_1)}\right]$$

ottenendo

$$e^{j\alpha} + e^{-j\alpha} = 2\,\cos\alpha$$

$$L^{-1}[G(s)] = M_1\, e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Parametri caratteristici di un sistema con due poli complessi coniugati

$$G(s) = \frac{u_1 + jv_1}{s - \sigma_1 - j\omega_1} + \frac{u_1 - jv_1}{s - \sigma_1 + j\omega_1} = 2\,\frac{u_1 (s - \sigma_1) - v_1\,\omega_1}{s^2 - 2\,\sigma_1\,s + \sigma_1^{\,2}\,\omega_1^{\,2}}$$

Posto

$$\omega_{n1} = \sqrt{\sigma_1^2 + \omega_1^2} \qquad \delta_1 = -\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \omega_1^2}}$$

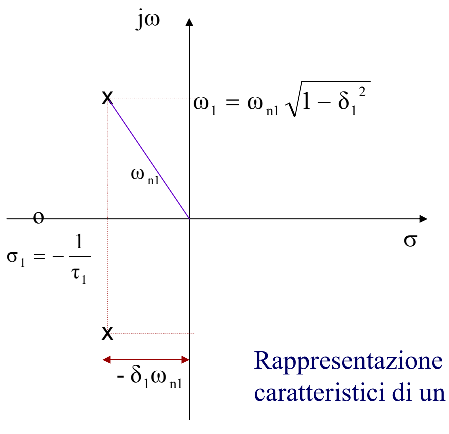
ω_{n1} è la pulsazione naturale

δ_1 è il coefficiente di smorzamento

$$k_1'' = -2\,\frac{u_1\,\sigma_1 + v_1\omega_1}{\sigma_1^2 + \omega_1^2} \qquad \tau_1 = -\frac{u_1}{u_1\,\sigma_1 + v_1\omega_1}$$

Così una f.d.t. con una coppia di poli complessi coniugati assume la forma

$$\frac{k_1''\,\omega_{n1}^{\,2}\,(1 + \tau_1\,s)}{s^2 + 2\,\delta_1\omega_{n1}\,s + \omega_{n1}^{\,2}}$$



Rappresentazione dei parametri caratteristici di un termine del 2° ordine

N.B. : Il **coefficiente di smorzamento** deve variare tra $0 \le \delta < 1$.
Infatti per aversi due poli complessi coniugati l'equazione di 2° grado a denominatore:

$$s^2 + 2\,\delta_1 \omega_{n1}\, s + \omega_{n1}^2$$

deve avere il determinante **$\Delta < 0$**

$$\Delta = (2\delta_1\omega_{n1})^2 - 4\omega_{n1}^2 = 4\delta_1^2\omega_{n1}^2 - 4\omega_{n1}^2 = 4\omega_{n1}^2\left(\delta_1^2 - 1\right) < 0$$

$$\left(\delta_1^2 - 1\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \delta_1 < 1$$

Esempio

$$G(s) = \frac{(2s+12)}{(s+1-2j)\,(s+1+2j)} = \frac{M_1}{2}\left[\frac{e^{j\varphi_1}}{(s+1-2j)} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{(s+1+2j)}\right]$$

$$k_i = G(s)(s-p_i)\big|_{s=p_i} \quad \begin{cases} k_1 = \dfrac{2\left(-1+2j\right)+12}{\left[\left(-1+2j\right)-1-2j\right]} = 1 - 2{,}5j = 2{,}69\, e^{-1{,}2j} \\ k_1' = 1 + 2{,}5j = 2{,}69\, e^{+1{,}2j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \pm 2 \\ \sigma_1 = -1 \\ \dfrac{M_1}{2} = 2{,}69 \\ \varphi_1 = 1{,}2 \end{cases}$$

$$G(s) = 2{,}69\left[\frac{e^{+1{,}2\,j}}{s-(-1+2j)} + \frac{e^{-1{,}2\,j}}{s-(-1-2\,j)}\right]$$

$$\boxed{L^{-1}[G(s)] = M_1\, e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)}$$

$$L^{-1}[G(s)] = 2 \times 2{,}69\, e^{-t}\cos(2t + 1{,}2)$$

Poli multipli

Per semplicità si suppone la f.d.t. con un unico polo di moltiplicità h.
Anche questa tipologia di f.d.t. può essere messa sotto forma di somma di fratti semplici:

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)^h} = \frac{k_1}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{(s-p_1)^2} + \frac{k_3}{(s-p_1)^3} + \ldots + \frac{k_h}{(s-p_1)^h}$$

Con i residui dati dalle formule:

$$k_i = \frac{1}{(i-1)!}\left[\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}(s-p_1)^h G(s)\right]\Bigg|_{s=p_i}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[k\frac{1}{(s+a)^n}\right] = k\frac{t^{n-1}\,e^{-a\,t}}{(n-1)!}}$$

Antitrasformando:

$$\boxed{f(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2\frac{t\,e^{p_1 t}}{1!} + k_3\frac{t^2\,e^{p_1 t}}{2!} + \ldots + k_h\frac{t^{h-1}\,e^{p_1 t}}{(h-1)!}}$$

Esempio

$$G(s) = \frac{(3s+12)}{(s+5)^2} = \frac{k_1}{(s+5)} + \frac{k_2}{(s+5)^2}$$

$$\frac{(3s+12)}{(s+5)^2} = \frac{k_1(s+5)+k_2}{(s+5)^2}$$

$$(3s+12) = k_1(s+5)+k_2$$

$$\begin{cases} 3s = k_1 s \\ 12 = 5k_1 + k_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = -3 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{2}{(s+5)} + \frac{-3}{(s+5)^2}$$

$$\boxed{L^{-1}\left[k\frac{1}{(s+a)^n}\right] = k\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\,e^{-a\,t}}$$

$$L^{-1}[G(s)] = 2\,e^{-5t} - 3t\,e^{-5t}$$